Természetes számok részhalmazainak súlyozott sűrűségéről

Bukor József
Selye János Tudományegyetem, Komárom
Matematika Tanszék
email: `jozsef.bukor@selyeuni.sk`

Az ismert aszimptotikus-, logaritmikus sűrűséget az alábbi módon általánosíthatjuk:

Az $f\colon \mathbb{N} \to (0,\infty)$ súlyfüggvény segítségével tetszőleges $A \subset \mathbb{N}$ halmazra és $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk az $A_f(n) = \sum_{a\in A,\ a\le n} f(a)$ összeget. A

$$\underline{d}_f(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)}, \qquad \overline{d}_f(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)}$$

határértékeket az A halmaz alsó ill. felső f-sűrűségének nevezzük.

Megjegyezzük, $f(n) = 1$ esetben az aszimptotikus sűrűséget, $f(n) = \frac{1}{n}$ esetben pedig a logaritmikus sűrűséget kapjuk.
Vizsgáljuk, hogy $f(n) = n^p$ $(p > 1)$ esetben hogyan függ az alsó és felső f-sűrűség az alsó és felső aszimptotikus sűrűségtől.

Továbbá foglalkozunk azzal a kérdéssel, milyen f, g függvényekre érvényes, hogy tetszőleges $0 \le \alpha \le \beta \le \gamma \le \delta \le 1$ számnégyeshez található olyan $A \subset \mathbb{N}$ halmaz, melyre

$$\underline{d}_f(A) = \alpha, \quad \underline{d}_g(A) = \beta, \quad \overline{d}_g(A) = \gamma, \quad \overline{d}_f(A) = \delta$$

teljesül.